Ogólna teoria miary
Lista 1

Definicja. Rodzinę S podzbiorów zbioru X nazywamy *półpierścieniem* jeśli spełnione są warunki

`(Przekrój)` $\quad \forall_{A,B\in S} \quad A\cap B\in S,$

`(Pseudo-Różnica)` $\quad \forall_{A,B\in S} \ \exists_{\{C_1,\dots,C_n\}\subset S} \quad A\setminus B = C_1\sqcup C_2\sqcup \dots \sqcup C_n,$

gdzie symbol „$\sqcup$” oznacza sumę rozłączną zbiorów.

Zad 1. Pokazać, że następujące rodziny zbiorów są półpierścieniami podzbiorów X:

a) $P=\{[a,b): a,b\in\mathbb{R}\}$, $X=\mathbb{R}$,

b) $P=\{[a,b)\times[c,d): a,b,c,d\in\mathbb{R}\}$, $X=\mathbb{R}^2$.

Zad 2. Pokazać, że w definicji półpierścienia warunek `(Pseudo-Różnica)` można zastąpić warunkiem

`(Pseudo-Różnica')` $\quad \forall_{A,B\in S} \ \exists_{\substack{D_1,\dots,D_n\subset X \\ D_i\setminus D_{i-1}\in S}} \quad B=D_0\subset D_2\subset \dots \subset D_n = A.$

Definicja. Rodzinę S podzbiorów zbioru X nazywamy *pierścieniem* jeśli spełnione są warunki

`(Suma)` $\quad \forall_{A,B\in S} \quad A\cup B\in S,$

`(Różnica)` $\quad \forall_{A,B\in S} \quad A\setminus B\in S.$

Zad 3. Pokazać, że każda rodzina zbiorów spełniająca warunek `(Różnica)` jest półpierścieniem, ale nie każdy półpierścień spełnia `(Różnica)`. Wyciągnąć stąd wniosek, że każdy półpierścień jest pierścienniem ale nie każdy pierścień jest półpierścieniem.

Zad 4. Niech P będzie półpierścieniem podzbiorów X. Wykazać, że rodzina

$$R=\left\{\bigcup_{i=1}^{n} A_i : A_i\in P,\ i=1,\dots,n\right\}$$

jest najmniejszym pierścieniem zawierającym P.

Zad 5. Które z przestrzeni topologicznych posiada tę własność, że klasa zbiorów otwartych tworzy pierścień?

Zad 6. Czy w definicji pierścienia można zastąpić warunek `(Suma)` warunkiem `(Przekrój)` ?

Zad 7. Sprawdzić, czy w definicji pierścienia można zastąpić warunek `(Różnica)` warunkiem

`(Różnica Symetryczna)` $\quad \forall_{A,B\in S} \quad A\Delta B\in S,$

gdzie $A\Delta B = A\setminus B\cup B\setminus A$ oznacza różnicę symetryczną zbiorów.

Zad 8. Wykazać, że rodzina zbiorów jest pierścieniem wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia warunki `(Przekrój)` i `(Różnica Symetryczna)` .

Zad 9. Udowodnić, że jeśli R jest pierścieniem zbiorów i zdefiniujemy na R operacje „mnożenia” i „dodawania” wzorami

$$A\odot B := A\cap B, \qquad A\oplus B := A\Delta B,$$

to R staje się pierścieniem w sensie algebraicznym. Jest to tak zwany *pierścień Boole'a*.